ALGEBRA M1 – LISTA 3
Wielomiany

1. Obliczyć ilorazy oraz reszty z dzielenia wielomianów P/Q, gdzie

$$(a)\ P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad Q(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$(b)\ P(z) = z^5 - z^3 + 1, \quad Q(x) = (z - i)^3$$

2. Nie wykonując dzielenia, znaleźć resztę z dzielenia wielomianów P/Q, gdzie

$$P(x) = x^{30} + 3x^{14} + 2, \quad Q(x) = x^3 + 1$$

3. Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite wielomianów

$$(a)\ W(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4, \quad (b)\ W(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

4. Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów

$$(a)\ W(x) = 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1, \quad (b)\ W(x) = x^3 - \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$$

5. Znaleźć wszystkie pierwiastki zespolone wielomianów

$$(a)\ W(z) = z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i), \quad (b)\ W(z) = z^4 - 3iz^2 + 4,$$

$$(c)\ W(z) = z^4 - z^2 - 2, \quad (d)\ W(z) = z^4 - 3z^3 - 5z^2 + 3z + 4$$

6. Wyznaczyć rozkład podanego wielomianu na nierozkładalne czynniki rzeczywiste oraz zespolone:

$$(a)\ W(z) = z^4 + 1, \quad (b)\ W(z) = z^4 + 5z^2 + 6,$$

$$(c)\ W(z) = z^3 - 6z - 9, \quad (d)\ W(z) = z^6 + 8$$

7. Uzasadnić, że jeżeli liczba z_0 jest pierwiastkiem wielomianu zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych, to jej sprzężenie $\overline{z_0}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

8. Znając pierwiastek $z_1 = 2 + i$ wielomianu $W(z) = z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25$, znaleźć jego pozostałe pierwiastki.

9. Rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste podane funkcje wymierne:

$$W(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)(x - 2)},; \quad U(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2(x + 3)}, \quad V(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$$

10. Funkcje wymierne z zadania 9 oraz funkcje postaci

$$W(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z^2 + 2z + 2)^2}, \quad U(z) = \frac{4i}{z^4 + 4}$$

rozłożyć na zespolone ułamki proste.

11. Udowodnić, że jeśli liczba x_0 jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu $W(x)$, to

$$W(x_0) = W'(x_0) = \ldots = W^{(k-1)}(x_0) = 0 \quad \wedge \quad W^{(k)}(x_0) \neq 0$$

12. Pokazać, że wielomiany postaci

$$W_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \frac{x^n}{n!}$$

nie mają pierwiastków wielokrotnych.

13*. Wykazać, że wielomian zespolony $W(z) = z^4 + 4z^3 + 12z + 23$ ma cztery różne pierwiastki zespolone (*Wskazówka*: Skorzystać z zadania 11.)

14*. Obliczyć sumę odwrotności pierwiastków oraz sumę kwadratów pierwiastków wielomainu z zadania 13.

15*. Pokazać, że rozwiązywanie równań postaci $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, gdzie $a \neq 0$ oraz $b \neq 0$, można sprowadzić do rozwiązywania równań postaci $y^3 + py + q = 0$ za pomocą podstawienia $y = x + h$, gdzie h jest odpowiednio dobraną stałą. Zastosować podstawienie tego typu do równania $x^3 - 3x^2 - 9x + 17 = 0$.

16*. Pokazać, że rozwiązywanie równania postaci $x^3 + px + q = 0$ można sprowadzić do rozwiązywania równania kwadratowego w innej zmiennej (*wskazówka:* zastosować wpierw podstawienie $x = y - \frac{p}{3y}$). Zastosować podstawienie tego typu do rozwiązania równania $x^3 + 9x + 2 = 0$.

Romuald Lenczewski